泛圈图的一个充分条件

伍玮[1],戚志如[2],袁秀华[1],孙志人[1]

(1. 南京师范大学数学与计算机科学学院,江苏 南京 210097)
(2. 江苏警官学院数学物理学教研室,江苏 南京 210012)

[摘要] 在文[1]中给出定理,设 G是一个 n-阶 2-连通图且 $\delta(G) \geq t$,若对于 G的任意两个不相邻的点 u和 v,均有 $|N(u) \cup N(v)| \geq n - t$成立,则 G是一个泛圈图或 $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$.本文的目的在于将此定理的条件减弱,只对图中距离为 2的点进行讨论,得出了泛圈图的一个充分条件.文中主要用数学归纳法对定理进行证明,先在引理中给出了几种特殊情况的证明,接着在定理的证明中讨论了一般情形.

[关键词] 2连通图,泛圈图,最小度
[中图分类号] O157.5 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2006)02-0031-04

A Sufficient Condition for Pancyclic Graphs

Wu Wei[1], Qi Zhiru[2], Yuan Xiuhua[1], Sun Zhiren[1]

(1. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)
(2. Department of Forensic Science, Jiangsu Police Officer College, Nanjing 210012, China)

Abstract: In [1], the author gave the theorem that let G be a 2-connected graph with $|V(G)| = n$ and $\delta(G) \geq t$, if $|N(u) \cup N(v)| \geq n - t$ for any nonadjacent vertices in G, then G is pancyclic or $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$. The aim of this paper is to relax the hypothesis to just consider the vertices with distance 2 and we obtain a sufficient condition for pancyclic graph. We prove the theorem mainly by induction. Firstly we give the proof for some special cases, and then we prove the theorem particularly.

Key words: 2-connected graph, pancyclic graph, minimum degree

0 引言

本文所讨论的图均为简单图.符号 V, E, δ分别表示图 G的顶点集,边集和最小度.对于 G中的任意一点 v, $d(v)$表示点 v的度数.设 H是图 G的一个子图且 $v \in V(G)$,记 $N_H(v) = \{u \in V(H) \mid uv \in E(G)\}$且 $d_H(v) = |N_H(v)|$.特别地,当 $H = G$时,简记 $N_H(v)$和 $d_H(v)$为 $N(v)$和 $d(v)$.用 C_m表示一个长为 m的圈,并称 C_m为 m-圈.设 $C = x_1 x_2 \cdots x_m$为一个长为 m的圈.定义 $N_C^+(v) = \{x_{i+1} \in V(C) \mid x_i v \in E(G)\}$, $N_C^-(v) = \{x_{i-1} \in V(C) \mid x_i v \in E(G)\}$这里下标按模 m计算.图 G的任意两点 u和 v之间的距离记为 $d(u, v)$.

设 G是一个 n阶图,若对每一个 $k(3 \leq k \leq n)$, G都含有长为 k的圈,则称 G为泛圈图.文献[2]-[11]中给出了若干有关圈及泛圈图定理,其中文[8]证明了若 G是 n阶 2-连通图, G是$[k_{1,2}, P_5, P_5^+]$-free,则 G是泛圈图或圈.其中文[5]和文[6]分别证明了 $t = 3$, $t = 4$时,若 G是一个 n阶 2-连通图且 $\delta(G) \geq t$,对于 G的任意两个距离为 2的点 u和 v, $|N(u) \cup N(v)| \geq n - t$,则 G是一个泛圈图或 $G \cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$.徐军在[1]中给出定理,设 G是一个 n-阶 2-连通图且 $\delta(G) \geq t$,若对于 G的任意两个不相邻的点 u和 v均

收稿日期: 2005-07-15.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371055).
作者简介: 伍玮,女,1981—,硕士,主要从事图论与组合优化的学习与研究. E-mail: njnuwuwei@126.com
通讯联系人: 孙志人,1964—,博士,教授,主要从事图论与组合优化的教学与研究. E-mail: zrsun@njnu.edu.cn

有 $|N(u)\cup N(v)|\geq n-t$成立,则 G是一个泛圈图或 $G\cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$并提出了以下问题:设 G是一个 n阶 2 - 连通图且 $\delta(G)\geq t$,对于 G的任意两个距离为 2的点 u和 v,若 $|N(u)\cup N(v)|\geq n-t$,则 G是一个泛圈图或 $G\cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$. 在本文中,我们将证明以下主要定理:

定理 1　对任意的 t(显然 $t\geq 2$)和 G的任意两个距离为 2的点 u和 v,若 $|N(u)\cup N(v)|\geq n-t$,则 G是一个泛圈图或 G是以下情况之一:(1) G是一个 5 - 圈,(2) $G\cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$,本文中用到的其它未作说明的术语和记号可在文献 [7]中找到.

1　引理和定理的证明

为了证明及叙述的简便,下面设 G是一个 n阶 2 - 连通图,$\delta(G)\geq t$,且对于 G的任意两个不相邻的点 u和 v有 $|N(u)\cup N(v)|\geq n-t$成立,G与 $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$不同构.

引理 1　设 $d(u,v)=2$且 $S\subseteq V(G)\setminus\{u,v\}$,若 $|S|\geq t-1$,则$\left(N(u)\cup N(v)\right)\cap S\neq\varnothing$.

证明　若$\left(N(u)\cup N(v)\right)\cap S=\varnothing$则 $N(u)\cup N(v)\subseteq V(G)\setminus\left(S\cup\{u,v\}\right)$有

$|N(u)\cup N(v)|\leq n-|S\cup\{u,v\}|\leq n-(t-1+2)=n-t-1<n-t$与题设矛盾,结论成立.

引理 2　G含有 3-圈, 4-圈或 G是 5-圈.

证明　如果 $\forall x\in V(G)$有 $d(x)=\delta(G)=t$,当 $t=2$

$|V|=4$时, $G\cong K_{2,2}$,矛盾.

$|V|=5$时, $|N(u)\cup N(v)|=3$,且 $n-\delta=3$,满足题目条件,此时 G是一个 5 - 圈.

$|V|\geq 6$时, $|N(u)\cup N(v)|=3$,而 $n-\delta\geq 4$与条件矛盾.

当 $t\geq 3$时,则设 $C_k=x_1x_2\cdots x_k$为 G中的一个长度最小的奇圈. (若 G只含偶圈,则为二部图,设 $G=G_{p,q}$,有 $pt=qt=|E|$,即 $p=q$矛盾.) 假设 G不含三圈,则 k为 ≥ 5的奇数,若在 $G\setminus C_k$中存在一点与 C_k上的至少三个点相邻,设三个点按顺时针方向依次为 v_i,v_j,v_k,由图中无三圈,则三点不相邻. 若 $j-i$, $k-j$为偶数,则有更短奇圈,矛盾. 否则不妨设 $j-i$为奇数且 ≥ 3, $k-j$为偶数. 若 $k-j>2$可得矛盾. 若 $k-j=2$,则原来的圈至少长为 $j-i+4$而我们可以找到 $j-i+2$的圈. 因此 C_k中无弦且 $G\setminus C_k$中的任一顶点至多和 C_k上的两点相邻,否则就与 C_k是 G中长度最小的奇圈矛盾. 故有

$$\sum_{i=1}^{k}(d(x_i)-2)=\sum_{i=1}^{k}d(x_i)-2k\leq 2n-2k,\text{由 } d(x_i)=t,\ i=1,2\cdots k,\text{从而 } n\geq\frac{tk}{2}\tag{1}$$

设 $N(x_1)\setminus V(C_k)=\{v_1,v_2\cdots v_{t-2}\}$,由 C_k的最小性知 $v_1,v_2\cdots v_{t-2}\notin N(x_k)$且$\{v_1,v_2\cdots v_{t-2}\}$为独立集,于是有 $d(v_1,x_k)=d(v_2,x_k)=\cdots=d(v_{t-2},x_k)=2$令 $S=\{v_2,v_3\cdots v_{t-2},x_2,x_3\}$,则 $|S|=t-1$,由引理 1 $\left(N(x_k)\cup N(v_1)\right)\cap S\neq\Phi$,又 $N(x_k)\cap S=\Phi$,所有 $N(v_1)\cap S\neq\Phi$,从而 $v_1x_3\in E(G)$,同理 $v_ix_3\in E(G)$, $i=2,3,\cdots t-2$因为 $d(x_3)=t$,有$\left(N(x_1)\cup N(x_3)\right)\cap\left(V(G)\setminus\left(V(C_k)\cup\{v_1,v_2,\cdots v_{t-2}\}\right)\right)=\Phi$,而 $d(x_1,x_3)=2$,由引理 1 $\left|V(G)\setminus\left(V(C_k)\cup\{v_1,v_2,\cdots,v_{t-2}\}\right)\right|\leq t-2$于是有

$$n=|V(G)|=|(V(G)\setminus V(C_k))\cup V(C_k)|\leq 2(t-2)+k\tag{2}$$

由 (1) (2), $\frac{tk}{2}\leq n\leq 2(t-2)+k$,从而 $t\leq 2$,矛盾. 由此, $C_3\subset G$.

如果 $\exists x\in V(G)$使 $d(x)\geq t+1$,设 $N(x)=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$,其中 $k=|N(x)|\geq t+1$. 若 G不含 3 - 圈,则对 $\forall x_i,x_i\in N(x)$, $i\neq j$,有 $d(x_i,x_j)=2$但 $|N(x_i)\cup N(x_j)|\leq|V(G)-\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}|\leq n-(t+1)<n-t$,与条件矛盾. 此时 $C_3\subset G$.

下面证明 $C_4\subset G$.

设 $C_3=x_1x_2x_3x_1$是 G中的一个 3 - 圈,假设 G是不存在 4 - 圈. 令 $T=V(G)\setminus V(C_3)$,则有 $N_T(x_i)\cap N_T(x_j)=\Phi$, $1\leq i\neq j\leq 3$. 否则存在 C_4. 此外,对 $\forall y_i\in N_T(x_i)$, $i=1,2,3$. 有$\{y_1,y_2,y_3\}$为独立集,否则同样存在 C_4. 不失一般性考虑 $y_1\in N_T(x_1)$和 x_2,由 $d(y_1,x_2)=2$,而$\left(N(y_1)\cup N(x_2)\right)\cap N_T(x_3)=\Phi$,由 $\delta(G)\geq t$及引理 1知 $|N_T(x_3)|\leq t-2$,类似, $|N_T(x_i)|\leq t-2$, $i=1,2$. 若 $|N_T(x_i)|<t-2$, $i=1$,

2, 3,则 $|N(x_i)| < t \le \delta(G)$, $i = 1, 2, 3$,矛盾.即 $|N_T(x_i)| = t-2$

存在 $z_2 \in N(y_2)\backslash\{x_2\}$,使得 $z_2x_2 \notin E(G)$(这样的点一定存在,否则由 $d_T(x_2) = t-2$,则 $d(y_2) = t-3+1 < t$,矛盾.)同时 $y_1z \notin E(G)$,否则 $d(y_1, y_2) = 2$, $|\{x_3\}\cup N_T(x_3)| = t-1$,但$\left(N(y_1)\cup N(y_2)\right)\cap\left(\{x_3\}\cup N_T(x_3)\right) = \phi$,与引理 1矛盾.同理存在 $z_3 \in N(y_3)\backslash\{x_3\}$,使得 $z_3x_i \notin E(G)$, $z_3y_1 \notin E(G)$.因此由 $t \ge 2$,有

$|N(y_1)\cup N(x_2)| \le n - |(N(x_1)\backslash\{x_2, x_3\})\cup(N(x_3)\backslash\{x_1, x_2\})\cup\{x_2, z_2, z_3\}| \le n-(t-2+t-2+3) = n-(t+t-1) < n-t$

与定理条件矛盾.

因此有 $C_4 \subset G$.

引理 3 设 u是 $G\backslash C_m$ 的一点,且 $|N_{C_m}(u)| \ge 2$, $\forall x \in N^+_{C_m}(u)$或 $x \in N^-_{C_m}(u)$, x和 $N(u)\backslash V(C_m)$中的点都不相邻,则 G有 $(m+1)$-圈.

证明 必有下面三种情况之一成立

(1) 存在 $x_i, x_{i+1} \in N_{C_m}(u)$.

(2) 存在 $x_i, x_j \in N_{C_m}(u)$使 $x_{i+1}, x_{j+1} \in E(G)$.

(3) 存在 $x_i, x_j \in N_{C_m}(u)$, $(i < j)$且$\{x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots x_{j-1}\}\cap N_{C_m}(u) = \phi$,则存在 $x_k \in \{x_{j+2}, x_{j+3}, \cdots x_i\}$,使 x_k和 x_{j+1}相邻,且 x_{k-1}和 x_{i+1}, u之一相邻.

由(1)～(3)之一,可以构造出$(m+1)$-圈.令 $x_i, x_j \in N_{C_m}(u)$.

若(1)～(3)均不成立,则当 $d(x_{i+1}, x_{j+1}) = 2$时, $|N(x_{i+1})\cup N(x_{j+1})| \le n - |N^+_{C_m}(u)| - |\{u\}| - |N(u)\backslash V(C_m)| < n-\delta$,矛盾.

当 $d(x_{i+1}, x_{j+1}) \ge 3$时, $\forall v \in N(x_{j+1})\backslash\{x_j\}$, $v = x_k \in \{x_{j+2}, x_{j+3}, \cdots, x_i\}$时, x_{k-1}和 x_{i+1}, u均不相邻. $v = x_k \in \{x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{j-1}\}$时, x_k和 x_{i+1}, u均不相邻.由 $d(x_{i+1}, u) = 2$,而 $|N(x_{i+1})\cup N(u)| \le n - |N(x_{j+1})\backslash\{x_j\}| - |\{x_{i+1}, u\}| < n-\delta$,矛盾.

定理 1的证明 由引理 2假设 G与 $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$不同构且 G不是 5-圈,则只要证明 G是一个泛圈图.令 $T = G\backslash C_m$.

情况 1 若存在 $u \in T$及 $x_k \in N^+_{C_m}(u)$或 $x_k \in N^-_{C_m}(u)$满足 $N(x_k)\cap(N(u)\backslash V(C_m)) \ne \phi$,利用数学归纳法,由引理 2知 G含有 3-圈, 4-圈.设 G含有 m-圈, $m+1$-圈,令 $u_1 \in N(x_k)\cap(N(u)\backslash V(C_m))$,那么 $x_1x_2\cdots x_{k-1}uu_1x_k\cdots x_mx_1$或 $x_1x_2\cdots x_ku_1ux_{k+1}\cdots x_mx_1$为一长为 $m+2$的圈.

情况 2 若对任意的 $u \in T$, $N^+_{C_m}(u)$或 $N^-_{C_m}(u)$中的任意一点和 $N(u)\backslash V(C_m)$中的点都不相邻.我们已有 G含有 3-圈.设 G含有 m-圈,下面证明 G含有$(m+1)$-圈.

情形 2.1 存在 $u \in T$使 $|N_{C_m}(u)| \ge 2$,由引理 3知 G含有$(m+1)$-圈.

情形 2.2 对任意 $u \in T$, $\max\{|N_{C_m}(u)|\} = 1$,则 $|T| \ge \delta(G) \ge t$

情形 2.2.1 存在 $x, y \in T$, $d(x, y) = 2$,由 $\max\{|N_{C_m}(u)|\} = 1$,及定理的条件可得 $n-t \le |N(x)\cup N(y)| \le n-m$成立,即 $m \le t$,这样对圈 C_m上的每一个点 x_i, $1 \le i \le m$,都存在 $y_i \in T$,使 $x_iy_i \in E(G)$,且当 $i \ne j$时, $y_i \ne y_j$, $x_iy_j \notin E(G)$否则与 $\max\{|N_{C_m}(u)|\} = 1$矛盾.若在 C_m上存在点 x_i, $1 \le i \le m$,使得 $x_ix_{i+2} \notin E(G)$,有 $d(x_i, x_{i+2}) = 2$注意到 $|N_T(y_i)| \ge \delta(G) - 1 \ge t-1$由引理 1:$\left(N(x_i)\cup N(x_{i+2})\right)\cap N_T(y_i) \ne \phi$,即 x_i或 x_{i+2}与 y_i在 T中有一个公共邻点,设为 w_1,如果 w_1与 x_{i+2}相邻,则 G存在$(m+1)$-圈.如果 w_1与 x_i相邻,则如上讨论有$\left(N(x_i)\cup N(x_{i+2})\right)\cap N_T(w_1) = \phi$,即 x_i或 x_{i+2}与 w_1在 T中有一公共邻点,设为 w_2.若 w_2与 x_{i+2}相邻,则结论成立.反之则可以找到 w_3,如此一直下去,若所有的 w_i都不与 x_{i+2}相邻,则 x_i是 G的割点,矛盾.若对 C_m上的每一个点 x_i, $(1 \le i \le m)$都有 $x_ix_{i+2} \in E(G)$.不妨设 $x_1x_3 \in E(G)$,当 $y_1y_3 \in E(G)$时,结论成立.当 $y_1y_3 \notin E(G)$时,由于 $|N_T(y_3)| \ge t-1$,且 $y_1, x_2 \notin N_T(y_3)$, $y_1x_2 \notin E(G)$,从而 $d(y_1, x_2) = 2$,由引理 1, $|\left(N(y_1)\cup N(x_2)\right)\cap N_T(y_3)| \ne \phi$,令 $u \in \left(N(y_1)\cup N(x_2)\right)\cap N_T(y_3)$,则 $x_1x_2uy_3x_3x_5x_6\cdots x_{m-1}x_m$或 $x_1y_1uy_3x_3x_5x_6\cdots x_{m-1}x_m$为 G中的$(m+1)$-圈.

情形 2.2.2　若 $\forall x, y \in T$,均有 $xy \in E(G)$,这时 $G(T)$ 是 G的完全子图. 若 $m < \frac{n}{2}$,则 G含有 $(m+1)$ - 圈.

下设 $m \geq \frac{n}{2}$,由 G的 2连通性,不失一般性,设 C_m 上有点 $x_i, x_j\ (i > j)$,在 T中分别有邻点 $y_i, y_j\ (y_i \neq y_j)$ 并且使 $|i-j| \pmod m$ 最小. 由于 $|T| \geq \delta(G) \geq t$,所以当 $1 < |i-j| \pmod m \leq t$时,由 $G(T)$ 是 G的完全子图,可得 G中的 $(m+1)$-圈. 当 $|i-j| \pmod m > t$时,由 $|i-j| \pmod m$ 的最小性以及 $\max\{|N_{C_m}(u)|\} = 1$,$\left(N(x_{i+2}) \cup N(x_{j+2})\right) \cap T = \phi$,因此 $x_{i+2}x_{j+2} \in E(G)$,则取 $x \in T, x \neq y_i, y_j$,可得 G中的 $(m+1)$-圈. 当 $|i-j| \pmod m = 1$时,不妨设 $i = 2, j = 1$. 若 $\left(N(x_3) \cup N(x_5)\right) \cap T = \phi$,由引理 1知 $x_3x_5 \in E(G)$, G存在 $(m+1)$ - 圈. 若 $\left(N(x_3) \cup N(x_5)\right) \cap T \neq \phi$,则 $|T| \geq t \geq 3$, $G(T)$ 是 G的完全子图,可得 G中的 $(m+1)$-圈.

类似可得, G有 $(m+2)$-圈.

综上,定理成立.

因为在 $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ 中,对图中距离为 2的点 u, v, $|N(u) \cup N(v)| = n - \delta$,可得如下推论.

推论 6　设 G是一个 n阶 2 - 连通图且 $\delta(G) \geq t$,若对于 G的任意两个距离为 2的点 u和 v,均有 $|N(u) \cup N(v)| \geq n - t + 1$,则 G是一个泛圈图.

[参考文献]

[1] 徐军. Hamiltonian圈的泛圈性的一个充分条件 [J]. 应用数学学报, 2001, 24(2): 310-313.
[2] Aldres Rel, Holton D A, Min Z K. A degree characterization of pancyclicity[J]. Discrete Math, 1994, 127: 23-29.
[3] Gould G J. Advances on the Hamiltonian problem-a survey[J]. Graphs and Combin, 2003, 19: 7-52.
[4] 卞秋香, 孙志人. 2连通图过指定边的长圈 [J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2003, 26(2): 10-14.
[5] 柳林, 高增科. 邻集并与圈的泛圈性 [J]. 太原机械学院学报, 1991, 13(2): 76-79.
[6] 储茂权, 王建中. 泛圈图的一个充分条件 [J]. 安徽师范大学学报:自然科学版, 1993, 16(1): 14-18.
[7] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications[M]. London: The Macmillan Press Ltd, 1976.
[8] 桂预凤, 李刚, 王彬. 泛圈图的一个充分条件 [J]. 武汉理工大学学报:交通科学与工程版, 2004, 28(4): 583-584.
[9] 叶淼林, 张克民. 点泛图性的领域并条件 [J]. 高校应用数学学报, 1998, 13A(1): 79-86.
[10] 周小跃. 泛圈图的一个新的充分条件 [J]. 东南大学学报:自然科学版, 2000, 30(6): 114-118.
[11] 朱卓宇, 吴宗玉. 邻集交和边泛图性质 [J]. 东南大学学报:自然科学版, 1997, 27(3): 124-126.

[责任编辑:陆炳新]