Paul Erdős等在半个世纪前提出的推广问题和这推广惊人地有且仅有一种形式

The generalized problem pointed out half a century ago by Paul Erdős et al. and the one and only one generalization.

期刊：	中国科学: 数学
稿件ID：	草稿
稿件栏目：	论文
作者提交日期：	2023-09-05
参与作者列表：	赵克文
关键词：	有限子集系, Katona-Kleitman定理的推广, 极值集合论, k-划分, Erdős-Kleitman问题。
英文关键词：	Family of subset of a finite set, The generalization of Katona-Kleitman theorem, Extreme value set theory, K-partitions, Erdős-Kleitman problem.
学科领域：	05-组合学

Paul Erdős 等在半个世纪前提出的推广问题和这推广**惊人**地有且仅有一种形式

赵克文

海南热带海洋学院理学院， 572022，海南三亚

摘要：本文解决 Paul Erdős 和 Daniel Kleitman 在 1970 年的极值集合论的综述论文中指出是唯一“interesting”的推广问题，得出有且仅有的唯一推广形式。此外，本文还证明《数学年刊》发表并得到科技部选拔发布为“海南科技 60 年”的 4 篇论文之一的 Katona 和 Kleitman 定理的推广”不是 Katona 和 Kleitman 定理的推广。

关键词：有限子集系；Katona−Kleitman 定理的推广；极值集合论；k-划分；Erdős-Kleitman 问题。

MSC (2020) 主题分类 05C15, 05C50

中图分类号 O157. 5

Daniel Kleitman和Gyula Katona分别在1965年和1966年的论文中得到二划分（即S=$S_1\cup S_2$，$S_1\cap S_2$=$\varnothing$）的推进Sperner系的子集系的上界为如下结果（即Katona和Kleitman定理，见参考文献[1][2]）：

定理1：设S是n元集合，S_1, S_2为S的一个二分划（即S=$S_1\cup S_2$，$S_1\cap S_2$=$\varnothing$），F是S的子集系，使得没有$A,B\in F$，满足下列条件之一：

（1） $A\cap S_1=B\cap S_1$，且$A\cap S_2\subset B\cap S_2$

（2） $A\cap S_1\subset B\cap S_1$，且$A\cap S_2=B\cap S_2$

则$|F|\le C^n{}_{[n/2]}$。（注：$C^n{}_{[n/2]}$是n元集的[n/2]元子集的个数；另，因A和B以及S_i都不考虑顺序，那其实只要考虑(1)、(2)之一就行了）。

一、Paul Erdős和Daniel Kleitman的1970年提出的推广问题和这推广的惊人的有且仅有一种形式

在Daniel Kleitman和Gyula Katona分别得到的上面二划分结果的基础上，Paul Erdős和Daniel Kleitman在1970年发表著名的极值集合论综述论文从六各领域概述其状况并第四个领域提出进一步的三划分问题（附注：这篇综述论文其后在1974年以及2006年*Discrete Mathematics*杂志创刊“35周年纪念特刊”再出版，这里照抄Paul Erdős等的这3篇论文的原话:“Sperner’s conclusion can be obtained, when the restriction of non-containment is relaxed considerably. Suppose, for example, that S is the union of two disjoint sets T_1 and T_2,

$$S = T_1 \cup T_2,\ T_1 \cap T_2 =\varnothing,$$

and suppose that F is restricted such that if $A\supset B$ for $A,B \in F$, then$A-B \not\subset T_1$ and$A-B$

$\not\subset T_2$. Then $|F| \leq C^n_{[n/2]}$.

that is, Sperner's bound still applies with these weakened requirements on F. **An interesting unsolved problem** is the analogue of this for $S = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ all T's disjoint; under these circumstances the analogous restriction of F is not sufficient to get the same bound on $|F|$. One can ask: What is the best bound? Also: What are the weakest additional restrictions necessary to impose upon F to get back to the Sperner bound in this case? One can also ask: What analogue of Lubell's inequality can be obtained for the $S = T_1 \cup T_2$ problem?"）。

从该文以及这陈述看到，它直接指出这篇著名综述论文中唯一有"interesting"的问题是三划分（$S = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ all T's disjoint）的，即这段陈述虽一共涉及 3 个问题但其中的第 3 个问题是二划分的问题. 而第 1 个问题，在该段说"not sufficient to get the same Sperner's bound."。这就说第 1 个问题已不能保证 Sperner's bound 而这领域有趣的问题是研究仍保持 Sperner's bound 的条件，因而第 1 个问题仅是有些相关的其中一个问题，如从之容易知道在这限制条件下的四划分时比三划分时的子集系的上界更大，并随着划分越大其子集系上界也越大，如此对更大的 k-划分情形的问题不仅更与 Sperner's bound 无关并也是一个没完没了的问题，至少是否有趣还有待时间检验？从而，该文说"An interesting unsolved problem"的所指问题，就只有第 2 问题。如此，本文就此解决这问题。

现在，下面首先解决这第2个问题："What are the weakest additional restrictions necessary to impose upon F to get back to the Sperner bound in this case?"，得到：

定理2：设S是n元集合，$S_1, S_2, \cdots, S_k$为S的一个k-分划（即$S_i \cap S_j = \emptyset$，$i \neq j$，$\sum_{l=1}^{k} S_l = S$），F^*是S的子集系，使得没有$A, B \in F^*$，满足：存在某个S_i有$A \cap S_i = B \cap S_i$，以及至少一个$S_j (j \neq i)$有$A \cap S_j \subset B \cap S_j$或$A \cap S_j \supset B \cap S_j$，而对所有$S_r (r \neq i, j)$有$A \cap S_r \subseteq B \cap S_r$或$A \cap S_r \supseteq B \cap S_r$，则$|F^*| \leq C^n_{[n/2]}$。

证明 记$S^2 = \cup_{t=2}^{k} S_t$，则S_1, S^2是S的二划分。断言: 对任何$A, B \in F^*$都不满足上面定理1的(1)或(2)。

因为若有(1): $A \cap S_1 = B \cap S_1$和$A \cap S^2 \supset B \cap S^2$。

此情况，显然有至少一个$S_j (j \geq 2)$使$A \cap S_j \supset B \cap S_j$，和对其余所有$S_r (1 \leq r \neq 1, j \leq k)$有$A \cap S_r \supseteq B \cap S_r$，这和定理2的条件矛盾。

若有(2): $A \cap S_1 \subset B \cap S_1$和$A \cap S^2 = B \cap S^2$。

此情况，显然有全部$A \cap S_j = B \cap S_j$ ($j \geq 2$)，也和定理2的条件矛盾。

即断言正确。由定理1，有$|F^*| \leq C^n_{[n/2]}$。定理2证毕。

进一步还不难看出，这定理2和Katona-Kleitman定理（上面定理1）在二划分时，完全相同。因此，我们的定理2是Katona和Kleitman定理的推广，并在二划分时完全相同说明其是**最小**的推广而且最小的推广显然只有一种形式。

其后，再说明定理2是**最大**的推广（最好可能的推广）：这是因为，从上面Paul Erdős和Daniel Kleitman的1970年的论文指出的“the analogue of this for $S = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ all T's disjoint; under these circumstances the analogous restriction of F is not sufficient to get the same bound on $|F|$”， 以及上面Gyula Katona的1966年的论文说的“It is easy to see, that Theorem 1 does not remain true if we divide the set into three or more parts”， 并且Gyula Katona的上面论文中举出三划分不成立的一个例。如此，从这2篇论文中任一篇，若在上面定理2中再多一个“$\subseteq$”号换为“$\subset$”，则可推出子集系结论不成立，即：

推论: 设S是n元集合，$S_1, S_2, \cdots, S_k$为S的一个k-分划（即$S_i \cap S_j = \varnothing$，$i \neq j$，$\sum_{l=1}^{k} S_l = S$），$F^*$是$S$的子集系，使得没有$A, B \in F^*$，满足：存在某个$S_i$有$A \cap S_i = B \cap S_i$，以及至少2个$S_j, S_p (j, p \neq i)$有$A \cap S_j \subset B \cap S_j$, $A \cap S_p \subset B \cap S_p$，而对所有$S_r (r \neq i, j, p)$有$A \cap S_r \subseteq B \cap S_r$，则$|F^*| \leq C^n_{[n/2]}$不成立。

这就是，最小推广等于最大推广。从而，Paul Erdős和Daniel Kleitman的1970年提出的推广问题有且仅有一种推广形式。因为，**古今中外的数学理论的推广**都几乎罕见是仅有一种形式的，所以说这是惊人的。

二、对科技部发布的“海南科技60年”的4篇论文之一的“Katona和Kleitman定理的推广”的否定，也就是它不是推广。

黄国泰在《数学年刊》1987年第3期发表的论文“Katona和Kleitman定理的推广”说“这一定理的推广引起了不少人的兴趣，但一直未被解决[3-5]”。

从此，黄国泰在这论文中用长约5页证明的“Katona和Kleitman定理的推广”为：设S是n元集合，$S_1, S_2, \cdots, S_k$为S的一个k分划（即$S_i \cap S_j = \varnothing$，$i \neq j$，$\sum_{l=1}^{k} S_l = S$），$F^{**}$是$S$的子集系，使得没有$A, B \in F^{**}$，满足：存在某个$S_i$有$A \cap S_i = B \cap S_i$，而对所有$S_j (j \neq i)$有$A \cap S_j \subseteq B \cap S_j$，则$|F^{**}| \leq C^n_{[n/2]}$。

黄国泰的这结果也成为科技部发布的“海南科技60年”的4个成果之一。不过，我们在下面证明这定理并不是“推广”：

第一、在形式上，黄国泰的上面定理不是Katona和Kleitman定理的推广。这是因为黄国泰的定理在集合S在二划分时的定理形式是：设S是n元集合，S_1, S_2为S的一个二分划（即$S_1 \cap S_2 = \varnothing$，$S_1 \cup S_2 = S$），$F^{**}$是$S$的子集系，使得没有$A, B \in F$，满足下列条件之一：

1** $A \cap S_1 = B \cap S_1$，且$A \cap S_2 \subseteq B \cap S_2$

2** $A \cap S_1 \subseteq B \cap S_1$，且$A \cap S_2 = B \cap S_2$

则$|F^{**}| \leq C^n_{[n/2]}$。

这看到在二划分时，黄国泰的定理和Katona-Kleitman定理不同（即黄国泰的定理的条件用“$\subseteq$”，而上面Katona-Kleitman定理的条件是“$\subset$”。虽然不同，但若黄国泰的定理在二划分时等于原结果或能推出原结果或包含原结果，则是**推**

广，可偏偏却反过来就象上面本文定理2得出的是原结果包含黄国泰的定理在二划分时的情形，即Katona-Kleitman定理推出黄国泰的定理在二划分时的结果）。

第二、在实质上，黄国泰的上面定理也不是Katona和Kleitman定理的推广。这是由Paul Erdős和Daniel Kleitman在1970年的上面综述论文、以及上面Gyula Katona的1966年的论文都说：在三划分时的条件中的二个包含式的符号都是“$\subset$”才使结论不成立。而黄国泰的定理在三划分时成立是因用“$\subseteq$”。这一个不成立和一个成立也就是Katona-Kleitman定理的子集系F和黄国泰的定理的子集系F^{**}在三划分时$|F|>|F^{**}|$，二划分也如此，因此这也是实质上的不同即实质上也不是推广。

上面说明了黄国泰的定理不是Katona-Kleitman定理的推广。

下面说明本文定理2也包含黄国泰的定理：

证明：若有黄国泰的定理条件即若没有$A,B\in F^{**}$满足$A\cap S_j\subseteq B\cap S_j$，则更有本文定理2的条件即更没有$A,B\in F^{*}$满足$A\cap S_j\subset B\cap S_j$。从而，由本文定理2推出黄国泰的定理。

这问题**值得研讨解决**，不止于它是科技部发布的“海南科技 60 年”的 4 篇论文之一（见 www.qzu5.com/e2.htm）；还因正如《群星潮》说“黄国泰独立申请的课题《关于有限子集系的研究》在 1989 年成为海南基础学科方面有史以来唯一获得国家自然科学基金资助的项目”，而以前海南的“有限子集系”工作几乎只有这篇论文。

参考文献

1. Daniel Kleitman, On a lemma of Littlewood and Offord on the distribution of certain sums. *Math. Z.* 1965, 90: 251–259.

2. Gyula Katona, On a conjecture of Erdős and a stronger form of Sperner's theorem. *Studia Sci. Math. Hungar.* 1966, 1: 59--63.

3. Paul Erdős, Daniel Kleitman, Extremal problems among subsets of a set. *1970 Proc. Second Chapel Hill Conf. on Combinatorial Mathematics and its Applications (Univ. North Carolina, Chapel Hill, N.C.)*, 1970: 146--170。（在第 162-163 页提出推广问题）

4. Paul Erdős, Daniel Kleitman, Extremal problems among subsets of a set. *Discrete Math.* 1974, 8: 281– 294。（见第 290 页）

5. Paul Erdős, Daniel Kleitman, Extremal problems among subsets of a set. *Discrete Math.* 2006, 306: 923 – 931（**35th Special Anniversary Issue**）。（见第 928-929 页）

6、黄国泰，Katona 和 Kleitman 定理的推广，《数学年刊》A 辑，1987, 3：413-419.

7、黄国泰，Generalization of a theorem of Katona and Kleitman. Chinese Ann. Math. Ser. B 8 (1987), no. 3, 390.（《数学年刊》B 辑，1987, 3：390-）

The generalized problem pointed out half a century ago by Paul Erdős et al. and the one and only one generalization.

Kewen Zhao

College of Science, Hainan Tropical Oceanographic University, Sanya 572022, Hainan.

Abstract: This paper solved the only "interesting" generalized problem among the extremal set theory survey problems by Paul Erdős and Daniel Kleitman in 1970, and obtain the "one and only one" generalization. In addition, this paper also proves that one of the four papers published by journal Chinese Ann. Math. and announced by the Ministry of Science and Technology in the "60 Years of Hainan Science and Technology" titled "The generalization of Katona and Kleitman Theorems" is not a generalization of Katona and Kleitman Theorems.

Keywords: Family of subset of a finite set; The generalization of Katona-Kleitman theorem; Extreme value set theory; K-partitions; Erdős-Kleitman problem.

作者简介：赵克文，男，1964 年生，海南三亚市海南热带海洋学院理学院教授，海南省有突出贡献的优秀专家称号获得者。邮箱：kwzhao2006@163.com