Paul Erdős 等在半个世纪前提出的推广问题的解决和《数学年刊》的一篇论文的否定

赵克文

海南热带海洋学院数学与信息科学研究所， 572022，海南三亚

摘要: Wolf 奖得主 Paul Erdős 等在 1970 年提出对二划分结果的三划分推广问题。其后，黄国泰 1987 年在我国《数学年刊》发表长约 5 页证明才得到的推广结果，如此本文作者赵克文于 2001 年在《数学年刊》发表对黄国泰的这结果的简单证明并仅基于 3 个要素: 仅需约 5 行字、引用二划分结果、不引用其它结果的直接证明，这表明黄国泰的这 k 划分推广和二划分结果实质上是一样并不是推广，而这 3 个要素是触发意识到这并无二致实质的动因否则这实质要再历经漫长岁月都难凸现征兆，如①它使清楚二划分结果与 k 划分推广有怎样的演算关系？（“直接”从二划分推出）；②k 划分推广具体是什么？（全部“⊆”中仅一个是“⊂”其余是“=”）；③反过来, k 划分结果也能直接推出二划分结果；④正反推出都“直接”, 则 k 划分与二划分结果实质上是一样的；⑤进而就似乎凸现 Paul Erdős 等的三划分推广问题的曙光即没有实质上不同的推广。这几行字的简单证明也几乎照搬 2001 年吴文俊教授和严加安教授审阅推荐发表的证明。现在，只因 Paul Erdős 等在其后的 2006 年出版的论文中仍提出三划分推广问题，如此本文不得不思考这问题，才彻底结束 Paul Erdős 等的这三划分推广问题。

关键词：有限子集系；Erdős-Kleitman 问题；三划分推广；k-划分推广；Katona-Kleitman 定理的推广。

MSC (2020) 主题分类 05C15, 05C50

中图分类号 O157.5

Daniel Kleitman和Gyula O. H. Katona分别在1965年和1966年的论文中得到推进Sperner系的二划分（即$S=S_1\cup S_2$，$S_1\cap S_2=\varnothing$）结果如下（见参考文献[1][2]）：

定理1：设S是n元集合，S_1, S_2为S的一个二分划（即$S=S_1\cup S_2$，$S_1\cap S_2=\varnothing$），F是S的子集系，使得没有$A,B\in F$，满足下列条件之一：

（1） $A\cap S_1=B\cap S_1$，且$A\cap S_2\subset B\cap S_2$

（2） $A\cap S_1\subset B\cap S_1$，且$A\cap S_2=B\cap S_2$

则$|F|\le C^n_{[n/2]}$。（注：$C^n_{[n/2]}$是n元集的$[n/2]$元子集的个数；另，因A和B以及S_i都不考虑顺序，那其实只要考虑(1)、(2)之一就行了）。

其后，Wolf奖得主Paul Erdős和Daniel Kleitman的1970年及其后的极值集合论综述论文（见文[3][4][5]）都在上面二划分结果的基础上提出进一步的三划分问题（即这篇综述说“Sperner’s conclusion can be obtained, when the restriction of

non-containment is relaxed considerably. Suppose, for example, that S is the union of two disjoint sets T_1 and T_2,

$$S = T_1 \cup T_2,\ T_1 \cap T_2 = \varnothing,$$

and suppose that F is restricted such that if $A \supset B$ for $A,B \in F$, then $A-B \not\subset T_1$ and $A-B \not\subset T_2$. Then $|F| \le C^n_{[n/2]}$.

that is, Sperner's bound still applies with these weakened requirements on F. **An interesting unsolved problem** is the analogue of this for $S = T_1 \cup T_2 \cup T_3$ all T's disjoint; under these circumstances the analogous restriction of F is not sufficient to get the same bound on $|F|$. One can ask: What is the best bound? Also: What are the weakest additional restrictions necessary to impose upon F to get back to the Sperner bound in this case?"）。

这推广问题是Paul Erdős等的这篇对6个领域的综述的全部未解决问题中"唯一"加装饰词而且是"**interesting**"的问题。重视也因科学界以前都以拥有Erdős数1甚至Erdős数2也为荣，并曾视Erdős为史上十大天才之一。就如黄国泰在1987年的《数学年刊》说许多论文（见文[9, 10, 11]等）对Paul Erdős等的这三划分推广问题感兴趣，但一直未能解决，如此他用长约5页解决下面k-分划推广（见文[6][7]）。但上面Erdős等已说三划分的"analogous restriction"不能使$|F| \le C^n_{[n/2]}$，以及上面Gyula O. H. Katona的论文中也举例说明"It is easy to see, that Theorem 1 does not remain true if we divide the set into three or more parts"，可见黄国泰的下面定理2的符号"$\subseteq$"和上面"$\subset$"是不同的（附仅供参考的本文曾得到的评审意见：即本人有些困惑的是多年来我投这论文给我国顶级中文杂志，审稿专家们说"$\subseteq$"和"$\subset$"并无区别等等）。因若这两个符号相同，则这就和上面Paul Erdős和Daniel Kleitman的论文以及Gyula O. H. Katona的论文中说不存在这类型三划分推广矛盾。所以，"$\subseteq$"中至多只有一个是"$\subset$"而其余都唯有是"="了：

定理2（黄国泰[6]；赵克文[8]）：设S是n元集合，$S_1, S_2, \cdots, S_k$为S的一个k-分划（即$S_i \cap S_j = \varnothing$，$i \ne j$，$\sum_{l=1}^{k} S_l = S$），$F^*$是$S$的子集系，使得没有$A,B \in F^*$，满足：存在某个$S_i$有$A \cap S_i = B \cap S_i$，而对所有$S_j (j \ne i)$有$A \cap S_j \subseteq B \cap S_j$，则$|F^*| \le C^n_{[n/2]}$。

因黄国泰先生的上面定理2的证明约5页。本文作者赵克文2001年在《数学年刊》仅用约5行字从定理1直接证明这定理2（见文[8]），这就令人立即意识到是否定理2和定理1本质上是一样的，也就是定理2不是推广，而实质上就是如此：因上面已说"$\subseteq$"中至多只有一个是"$\subset$"而其余都唯有是"="，如此在这k-分划中把其中任意k-1个S_j合为一个子集与另一S_i组成的二划分，显然k-分划和这二划分条件是互推的，也就是有k-分划的条件当且仅当有二划分的条件，且k-分划和二划分是互相直接的，更仅一个"$\subset$"而其余都是"="，所以定理2算不得定理1的推论。注：能发现这定理2和定理1的直接关系主要是2001年《数学年刊》的证明的三个因素：引用定理1、仅约5行字、不引用其它结果等的直接证明，否

则，可能再过半个世纪甚至更久都难觉察实质。

虽然上面谜案揭开解决了，但到底有没有三划分推广？现在思考这问题只因Paul Erdős和Daniel Kleitman在2006年出版的论文中仍再提出三划分推广问题，如此，本文在下面将彻底回答这问题。

下面先证明包含定理2的定理3，并也几乎完全照搬2001年在《数学年刊》的几行字证明，进而就解决Paul Erdős等在半个世纪前提出的推广问题：

定理3：设S是n元集合，$S_1, S_2, \cdots, S_k$为S的一个k-分划（即$S_i\cap S_j=\varnothing$，$i\neq j$，$\sum_{l=1}^{k}S_l=S$），F^{**}是S的子集系，使得没有$A,B\in F^{**}$，满足：存在某个S_i有$A\cap S_i=B\cap S_i$，以及至少一个$S_j(j\neq i)$有$A\cap S_j\subset B\cap S_j$或$A\cap S_j\supset B\cap S_j$,而对所有$S_r(r\neq i,j)$有$A\cap S_r\subseteq B\cap S_r$或$A\cap S_r\supseteq B\cap S_r$，则$|F^{**}|\leq C^n_{[n/2]}$。

证明 记$S^2=\cup_{t=2}^{k}S_t$，则S_1, S^2是S的二划分。断言：对任何$A,B\in F^{**}$都不满足上面定理1的(1)或(2)。

因为若有(1): $A\cap S_1=B\cap S_1$和$A\cap S^2\supset B\cap S^2$。

此情况，显然有至少一个$S_j(j\geq 2)$使$A\cap S_j\supset B\cap S_j$，和对其余所有$S_r(1\leq r\neq 1,j\leq k)$有$A\cap S_r\supseteq B\cap S_r$，这和定理2的条件矛盾。

若有(2): $A\cap S_1\subset B\cap S_1$和$A\cap S^2=B\cap S^2$。

此情况，显然有全部$A\cap S_j=B\cap S_j\ (j\geq 2)$，也和定理2的条件矛盾。

即断言正确。由定理1，有$|F^{**}|\leq C^n_{[n/2]}$。定理3证毕。

显然，由条件关系知定理3可直接推出定理2。其后，进一步分析定理3：首先，定理3的条件是**最好**可能的。这是因为，从上面Paul Erdős和Daniel Kleitman的1970年的论文，以及Gyula Katona的1966年的论文都说在三划分是不再有二划分时的形式（也就是这2篇论文都肯定在上面定理3中再多一个“$\subseteq$”号换为“$\subset$”，则子集系结论不成立），所以，定理3是最好的。另一方面，这上面定理3也是最弱的限制条件推广，可见，k-划分的推广形式是**唯一的**。不论如何，仿照上面理由同样可知本文的定理3在实质上仍是二划分情形，从而解决Paul Erdős和Daniel Kleitman半个世纪前提出的三划分推广问题。

当然，问题能引出相关的深入长久的讨论甚至争议，可能比问题完结、销声匿迹更有用，这或能深入地推出更重要的成果或说真理。如此，这就算在Paul Erdős大师等的这问题引出对它及相关问题深入争议和探索也好。

致谢: 作者感谢审稿人的一些有益意见！作者也感谢吴文俊教授和严加安教授的关心和帮助（这篇论文的证明完全套用吴文俊教授和严加安教授审阅评价推荐的本人 2001 年在《数学年刊》的几行字的证明）

参考文献

1. Daniel Kleitman, On a lemma of Littlewood and Offord on the distribution of certain sums. *Math. Z.* 1965, 90: 251–259.

2. Gyula O. H. Katona, On a conjecture of Erdős and a stronger form of Sperner's theorem. *Studia Sci. Math. Hungar.* 1966, 1: 59--63.

3. Paul Erdős, Daniel Kleitman, Extremal problems among subsets of a set. *1970 Proc. Second Chapel Hill Conf. on Combinatorial Mathematics and its Applications (Univ. North Carolina, Chapel Hill, N.C.),* 1970: 146--170。（在第 162-163 页提出推广问题）

4. Paul Erdős, Daniel Kleitman, Extremal problems among subsets of a set. *Discrete Math.* 1974, 8: 281– 294。（见第 290 页）

5. Paul Erdős, Daniel Kleitman, Extremal problems among subsets of a set. *Discrete Math.* 2006, 306: 923 – 931。（见第 928-929 页）

6、黄国泰，Katona 和 Kleitman 定理的推广，《数学年刊》A 辑，1987, 3: 413-419。

7、黄国泰，Generalization of a theorem of Katona and Kleitman. Chinese Ann. Math. Ser. B 8 (1987), no. 3, 390。（《数学年刊》B 辑，1987, 3: 390-）

8、赵克文，"Katona-Kleitman 定理的推广定理"的简短证明，《数学年刊》, 2001, 2:177-178。

9. N. G. de Bruijn，J. v. E. Tengbergen，D. Kruyswijk，On the set of divisors of a number, Nieuw Arch. Wisk.(2) 23 (1951) 191-193

10. C. Greene ， D. Kleitman ， Proof techniques in the theory of finite sets. Studies in combinatorics, pp. 22--79, Studies in Math. 17, Mathematical Association of America.

11. C. L. Liu ， Topics in combinatorial mathematics. Notes on lectures given at the 1972, Mathematical Association of America.

The solution to the generalization problem proposed by Paul Erdős et al. half a century ago and the negation of a paper in Chinese Ann. Math.

Kewen Zhao

Inst. Math. Info. Sci., Hainan Tropical Oceanographic University, Sanya 572022, Hainan.

Abstract: Wolf Award winner Paul Erdős et al. in 1970 proposed the problem of three partition generalization from a binary partition result. Subsequently, in 1987, Guotai Huang published a promotion result in Chinese Ann. Math. that was used about 5 pages to prove. Therefore, the author of this article, Kewen Zhao, published a simple proof of Guotai Huang's result in Chinese Ann. Math. in 2001, which was only based on three elements: about 5 lines, citing the binary partition result, and not citing other results in the proof. This indicates that Guotai Huang's generalization and the binary partition result are essentially the same and not a generalization, and these three elements are all crucial and may not be clear in essence for half a century or even longer, and that can be seen ①What is the direct relationship between the generalization of two

partition and k-partition? (Derived directly from the two division); ② What is the specific of k-partition? (Only one "⊂" in all "⊆" and the rest are "="); ③ Conversely, the k-partition result can also directly derive the two partition result; ④ If both positive and negative deductions are "direct", then the k-partition and two partition results are essentially the same; ⑤ And then it seems to highlight the dawn of Paul Erdős' three partition generalization problem and there are no substantially different generalization. This simple proof has been reviewed and recommended for publication by Professor Wenjun Wu and Professor Jia'an Yan. But is there a three partition generalization? due to Paul Erdős et al. in the following paper published in 2006, proposed the problem of three partition generalization. Therefore, this article now has to prove a more specific result, thus completely ending the three partition generalization problem by Paul Erdős et al.
Keywords: Family of subset of a finite set; Erdős-Kleitman problem; Three partitions generalization; K-partitions generalization; The generalization of Katona-Kleitman theorem.

作者简介：赵克文，男，1964 年生，海南三亚市海南热带海洋学院数学与信息科学研究所研究员，海南省有突出贡献的优秀专家称号获得者。邮箱：kwzhao2006@163.com